المصفوفات والمحددات :

1. تستخدم في النماذج الاقتصادية عندما تكون عدد المتغيرات الداخلية في النموذج كبيرة
2. اسلوب مبسط لعرض جميع المعاملات التي تنظمها المعادلات الخطية في النموذج
3. تمكن من اختبار امكانية حل النموذج من عدمه
4. تمكن من توفير اسلوب مبسط لقيم المتغيرات المجهولة في النموذج دفعة واحدة
5. المصفوفات هي النموذج الذي تتبعه البرامج الحاسوبية

وبالتالي المصفوفات تساعدنا في حل المعادلات الخطية ذات المتغيرات الكثيرة وحل المعادلات الصفرية وحل المعادلات التي لا يتساوى عدد المتغيرات مع عدد المعادلات التي قيمة محددها العام صفر .

تعريف المصفوفة :

تركيبة رياضية مكونة من عناصر مرتبة على شكل صفوف واعمدة محصورة بين اقواس مثال

$$A_{mn} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ & & \vdots \\ a_{31} & a_{32} \ldots & a_{3n} \end{bmatrix}$$

انواع المصفوفات :

- **المصفوفة المربعة :**

$$A_{3.3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

- **المصفوفة القطرية : القطر ارقام وبقية العناصر اصفار**

$$A_{mn} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{3n} \end{bmatrix}$$

- **مصفوفة الوحدة : كلها اصفار والقطر رقم واحد (1)**

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- **مصفوفة: متجه عامودي** فقط عامود واحد

$$A_{m1} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix}$$

- **مصفوقة متجه افقي : فقط صف واحد**

$$A_{1n} = [a_{11} \quad a_{12} \quad \ldots\ldots a_{1n} \ ]$$

- **المصفوفة الصفرية: كلها اصفار**

$$O_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- **المصفوفة المجزأه : يمكن تقسيم عناصرها والحصول على مصفوفات بسيطة**

جمع وطرح المصفوفات :

الترتيب غير مهم في الجمع ولكن مهم بالطرح

اذا اعطيتي المصفوفتين $A_{3.3} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ ، $B_{3.3} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

1. **اوجدي** $A_{3.3}+B_{3.3}$
2. **أ,جدي** $B_{3.3}+A_{3.3}$
3. **قارني بين 1و2**
4. **اوجدي** $A_{3.3}-B_{3.3}$
5. **أ,جدي** $B_{3.3}-A_{3.3}$
6. **قارني بين 1و2**

الحل :

.1

$$A_{3.3}+B_{3.3}= \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 5 \\ 7 & 2 & 8 \\ 6 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

.2

$$B_{3.3}+A_{3.3}= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 5 \\ 7 & 2 & 8 \\ 6 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

الترتيب غير مهم بالجمع

.3

$$A_{3.3}-B_{3.3}= \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

.4

$$B_{3.3}-A_{3.3}= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

الترتيب مهم ويؤثر بالناتج

ضرب المصفوفات :

مثال المصفوفة $A_2= \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-4} \end{bmatrix}$

1. **ضرب مصفوفة بمعامل كمي (عدد)**

مثال اضربي المصفوفة اعلاه ب5 ←

$$\mathbf{5}* \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{10} & \mathbf{5} \\ \mathbf{5} & \mathbf{-20} \end{bmatrix}$$

مثال اضربي المصفوفة اعلاه ب 5^{-1} ←

$$5^{-1}* \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{2/5} & \mathbf{1/5} \\ \mathbf{1/5} & \mathbf{-4/5} \end{bmatrix}$$

2. **ضرب مصفوفة بمصفوفة** : لابد ان يكون عدد الاعمدة في المصفوفة الاولى يساوي عدد الصفوف في الثانية لكي تتم عملية الضرب

$$A_{nm} * \underbrace{B_{mn}} = C_{nn}$$

مثال :

$$A_{2.3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad B_{3.2} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{2.3} \;.\; B_{3.2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 14 \\ 29 & 41 \end{bmatrix}$$

$$B_{3.2} \;.\; A_{2.3} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 24 & 30 \\ 23 & 31 & 39 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

هل ممكن توجدي ناتج ضرب الاتي ؟

$$A_{3.2} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad ، \quad B_{3.2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

لا يمكن لاختلال الشرط

ضرب مصفوفة الوحدة في اي مصفوفة لا ياثر بمعنى

$$I_n * A = A * I_n$$

المصفوفة المحورة : Matrix Transpose

هي المصفوفة التي تم نقل صفوفها اعمدة واعمدتها لصفوف

$$A_{3.2} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad A^T_{2.3} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

تحوير المحورة يعطي المصفوفة الاصلية

ملاحظة مصفوفة الوحدة لا تتاثر بعملية التحوير $I_3 = I_3^T$

كذلك من المصفوفة المحورة $(A+B)^T = A^T + B^T$

معكوس المصفوفة (مقلوب) Inverse of Matrix

معكوس المصفوفة في جبر المصفوفات تماثل القسمة في الجبر العادي مثلا معكوس العدد 5 هو $\frac{1}{5}$ او 5^{-1}

نعلم ان ضرب اي عدد في معكوسه يساوي واحد صحيح مثلا $\frac{1}{5} * 5 = 1$

معكوس المصفوفة A هو A^{-1}

شروط ايجاد معكوس المصفوفة :

1. **ان تكون المصفوفة مربعة**
2. **قيمة المصفوفة لا تساوي صفر** $[A] \neq 0$
3. **ضرب المصفوفة في معكوسها تساوي المعكوس في المصفوفة نفسها يساوي مصفوفة الوحدة**

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A$$

- **الطريقة المبسطة للحصول على معكوس مصفوفة 2*2**

بشكل عام يمكننا ايجاد معكوس $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

- باستخدام الطريقة

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

مثال : $A=\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

1. نوجد قيمة المحدد $|A|$

$$|A| = (4*2) - (3*3) = -1$$

2. نوجد مصفوفة المرافقات

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

3. نوجد المصفوفة المحورة (المدورة)

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

4. نضرب المصفوفة المحورة ب $\frac{1}{|A|}$

$$A^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

5. بالتالي معكوس المصفوفة

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

التحقق

$$A^{-1}\ A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A\ A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

اوجدي معكوس المصفوفة

$$\begin{bmatrix} 1 & 9 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 4 & 11 \end{bmatrix}$$

1. نوجد قيمة المحدد $|A|$

$$\begin{vmatrix} 1 & 9 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 4 & 11 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 9 \\ 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{matrix}$$

$$|A| = \{((1*5*11)+(9*7*3)+(2*2*4)) - ((9*2*11)+(1*7*4)+(2*5*3))\}$$

$$|A| = \{ (55+189+16) - (198+28+30)\}$$

$$|A| = \{260-256\}$$

$$|A| = 4$$

2. نوجد مصفوفة المرافقات: بايجاد محيدد كل عنصر

$$Adj.(A) = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 11 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 11 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 9 & 2 \\ 4 & 11 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 11 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 9 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 & -1 & -7 \\ -91 & 5 & 23 \\ 54 & -3 & -13 \end{bmatrix}$$

3. نوجد المصفوفة المحورة : نجعل الصفوف اعمدة والاعمدة صفوف

$$Adj.(A) = \begin{bmatrix} 27 & -1 & -7 \\ -91 & 5 & 23 \\ 54 & -3 & -13 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 27 & -91 & 54 \\ -1 & 5 & -3 \\ -7 & 23 & -13 \end{bmatrix}$$

4. نضرب المصفوفة المحورة في مقلوب المحدد $|A|$ للحصول على A^{-1}

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 27 & -91 & 54 \\ -1 & 5 & -3 \\ -7 & 23 & -13 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 6.75 & -22.75 & 13.25 \\ -0.25 & 1.25 & -0.75 \\ -1.75 & 5.75 & -3.25 \end{bmatrix}$$

استخدام المصفوفات والمحددات في حل المعادلات الاتية :

مثال ترغب شركة كيماوية خلط نيتروجين وحامض الفوسفريك والبوتاس للحصول على 3600 رطل من السماد الكيماوي اذا كان وزن النيتروجين يعادل 3 امثال وزن حامض الفوسفوريك وكان مجموع كمية حامض الفوسفريك والبوتاس هو 1200 رطل

المطلوب حولي هذه المشكلة لشكل رياضي ثم استخدمي المصفوفات والمحددات لاستخراج عدد الارطال المطلوبة من كل من المواد الكيماوية الثلاث؟

الحل :نفترض ان المتغير X : *عدد ارطال النتروجين*

Y : *عدد ارطال حامض الفوسفريك*

Z : *عدد ارطال البوتاس*

النظام الخطي :

X+Y+Z=3600

X-3Y =0

Y+Z=1200

اولا: حل المعادلات الانية باستخدام معكوس المصفوفة

1. مصفوفة المعاملات $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -3 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$

2. متجه المجاهيل $\underline{X}=\begin{bmatrix}X\\ Y\\ Z\end{bmatrix}$

3. متجه الثوابت $\underline{K}=\begin{bmatrix}3600\\ 0\\ 1200\end{bmatrix}$

$$|A|=\left|\begin{matrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -3 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{matrix}\right|\begin{matrix}1 & 1\\ 1 & -3\\ 0 & 1\end{matrix}\Bigg| = -3$$

$$\text{Adj. A}=\begin{bmatrix} +\begin{vmatrix}-3 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & -3\\ 0 & 1\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}1 & 1\\ -3 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -3\end{vmatrix}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 3 & -1 & -4\end{bmatrix}$$

$$\text{Adj. } A=\begin{bmatrix}-3 & 0 & 3\\ -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -4\end{bmatrix}$$

$A^{-1}=\frac{1}{A}\;.\;Adj.A$

$$A^{-1}=\frac{1}{-3}\begin{bmatrix}-3 & 0 & 3\\ -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -4\end{bmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0.33 & -0.33 & 0.33\\ -0.33 & 0.33 & 1.33\end{bmatrix}$$

$\underline{X}= A^{-1}\,.\,\underline{K}$

$$\begin{bmatrix}X\\ Y\\ Z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0.33 & -0.33 & 0.33\\ -0.33 & 0.33 & 1.33\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3600\\ 0\\ 1200\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}X\\ Y\\ Z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2400\\ 800\\ 400\end{bmatrix}$$

ثانيا حل المعادلات الانية بطريقة كريمر (Cramer's Rule)

1. ***ايجاد قيمة المحدد العام*** ΔA
2. ***ايجاد قيمة محددات المتغيرات بستبدال مصفوفة الثوابت في العمود الخاص فيها في المصفوفة***
3. ***قسمة محدد المتغير على المحدد العام تعطي قيمة المتغير***

<u>طريقة كرامر</u> نقوم أولاً بإيجاد محدد المصفوفة الاصلية ثم نقوم بإيجاد المصفوفة الفرعية المشتقة لكل مجهول على حدة

$$\Delta A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ & & \vdots \\ a_{31} & a_{32} \ldots & a_{3n} \end{bmatrix} \quad , \Delta x_1 = \begin{bmatrix} b1 & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ b2 & a_{22} & a_{2n} \\ & & \vdots \\ bn & a_{32} \ldots & a_{3n} \end{bmatrix} , \ldots.$$

ويكون الحل لكل مجهول هو حاصل قسمة محدد هذا المتغير على المحدد الرئيسي

$$x_1 = \frac{\Delta x1}{\Delta A} \;,\; x_2 = \frac{\Delta x2}{\Delta A} \;, \ldots\ldots$$

حل المعادلات التالية بطريقة كرايمر واوجدي قيمة كل من X1,X2,X3

$$X_1 - X_2 + X_3 = 4$$

$$2X_1 - 3X_2 - 2X_3 = 3$$

$$-2X_1 + X_2 + 4X_3 = -3$$

1. نوجد قيمة المحدد ***A*** ويسمى ***A*** ∆

$$\Delta A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & -2 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix} = -10$$

$$\Delta X_1 = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 3 & -3 & -2 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix} = -40 \Rightarrow \quad X_1 = \frac{\Delta X_1}{\Delta A} = \frac{-40}{-10} = 4$$

$$\Delta X_2 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -2 & -3 & 4 \end{bmatrix} = -10 \Rightarrow \quad X_2 = \frac{\Delta X_2}{\Delta A} = \frac{-10}{-10} = 1$$

$$\Delta X_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & -3 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \end{bmatrix} = -10 \Rightarrow \quad X_3 = \frac{\Delta X_3}{\Delta A} = \frac{-10}{-10} = 1$$