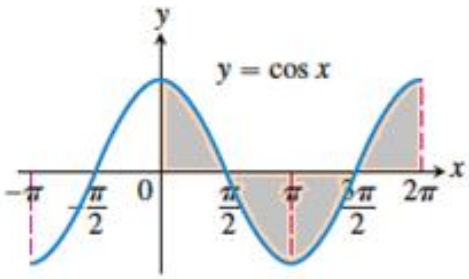
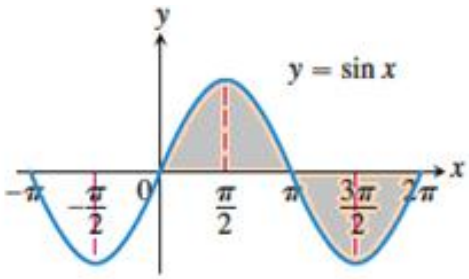
الدوال المثلثية *Trigonometric functions*

وهي دوال لزاوية هندسية وهي ذات اهمية لدراسة مثلث أو عرض ظواهرِ دورية أو متكررة كالموجات. ويمكن تعريف هذه الدوال كنسبةً بين أضلاع مثلث قائم يَحتوي تلك الزاويةَ .والشكل ادناه يوضح رسم هذه الدوال و منطلق Domain و مدى Range ودورة Period كل منها .



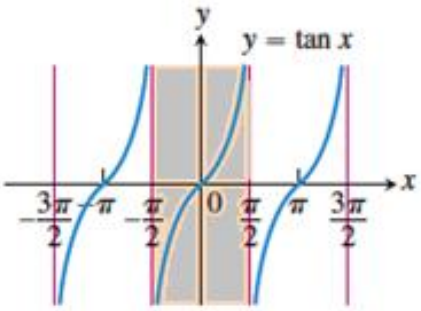
Domain: $-\infty < x < \infty$
Range: $-1 \le y \le 1$
Period: 2π

(a)



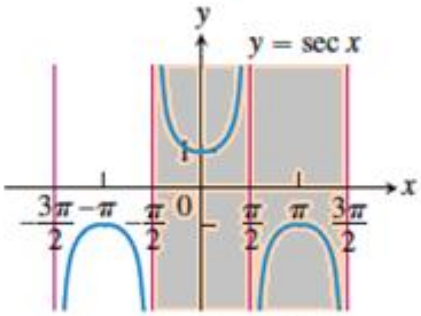
Domain: $-\infty < x < \infty$
Range: $-1 \le y \le 1$
Period: 2π

(b)



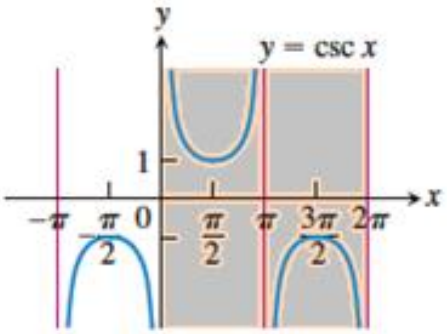
Domain: $x \neq \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \ldots$
Range: $-\infty < y < \infty$
Period: π

(c)



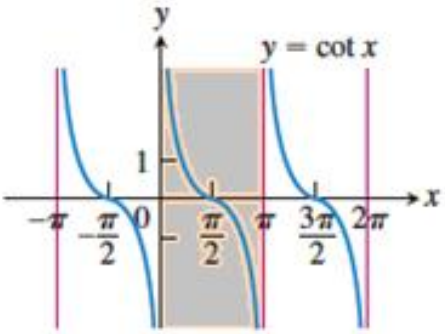
Domain: $x \neq \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \ldots$
Range: $y \le -1$ and $y \ge 1$
Period: 2π

(d)



Domain: $x \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$
Range: $y \le -1$ and $y \ge 1$
Period: 2π

(e)



Domain: $x \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$
Range: $-\infty < y < \infty$
Period: π

(f)

بعض المتطابقات المثلثية

1. $\sin(x \mp y) = \sin x \cos y \mp \sin y \cos x$

2. $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

3. $\cos(x \mp y) = \cos x \cos y \pm \sin x \sin y$

4. $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$

5. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$, $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$

6. $\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$, $\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$

مشتقات الدوال المثلثية

1. $\dfrac{d}{dx}(\sin u) = \cos u \cdot \dfrac{du}{dx}$
2. $\dfrac{d}{dx}(\cos u) = -\sin u \cdot \dfrac{du}{dx}$
3. $\dfrac{d}{dx}(\tan u) = \sec^2 u \cdot \dfrac{du}{dx}$
4. $\dfrac{d}{dx}(\cot u) = -\csc^2 u \cdot \dfrac{du}{dx}$
5. $\dfrac{d}{dx}(\sec u) = \sec u \tan u \cdot \dfrac{du}{dx}$
6. $\dfrac{d}{dx}(\csc u) = -\csc u \cot u \cdot \dfrac{du}{dx}$

مثال (١) جد مشتقة الدالة $y = \sin^3 2x$

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = 3\sin^2 2x \times \cos 2x \times 2$$
$$= 6\sin^2 2x \cos 2x$$

مثال (٢) جد مشتقة الدالة $y = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x$ عند $x = \pi$

الحل :

$$y' = x^2 \cos x + 2x \sin x - 2x \sin x + 2\cos x - 2\cos x = x^2 \cos x$$

$$y'(\pi) = \pi^2 \cos \pi = \pi^2(-1) = -\pi^2$$

مثال (٣) اذا كانت $x = \sec t \ , \ y = \tan t$ فاثبت ان $\frac{dy}{dx} = \csc t$

الحل :

$$\frac{dy}{dt} = \sec^2 t$$

$$\frac{dx}{dt} = \sec t \tan t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \sec^2 t \times \frac{1}{\sec t \tan t}$$

$$= \frac{\sec t}{\tan t} = \frac{1/\cos t}{\sin t/\cos t}$$

$$= \frac{1}{\sin t} = \csc t$$

تمارين

١. جد مشتقة الدوال التالية

1. $y = \cos(1 - 2x)$ 2. $y = \sqrt{x \tan x}$

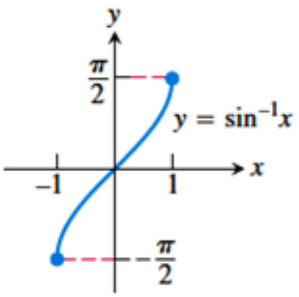
٢. اذا كان $x = \theta + \cos\theta \ , \ y = \theta - \cos\theta$ فاثبت ان :

$$\frac{dy}{dx} = (\sec\theta + \tan\theta)^2$$

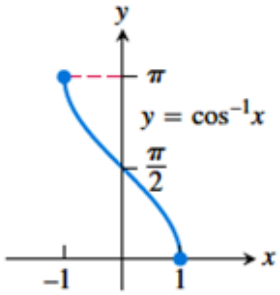
الدوال المثلثية العكسية *Inverse trigonometric functions*

تسمى هذه الدوال بدوال (القوس) وهي عبارة عن معكوس الدوال المثلثية فاذا كان $x = \sin y$ فان $y = \sin^{-1} x$ ويرمز لها ايضا $arc\,sin(x)$ وتسمى دالة معكوس الجيب ومن خواص هذه الدالة $\sin(\sin^{-1} x) = \sin^{-1}(\sin x) = x$ والكلام نفسه ينطبق على باقي الدوال المثلثية العكسية وفيما يلي رسم توضيحي لهذه الدوال مع منطلقها ومداها

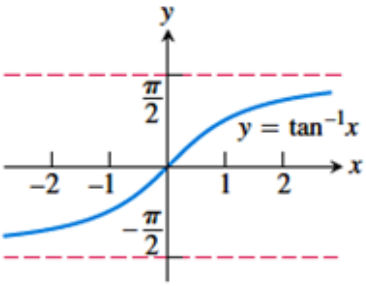
Domain: $-1 \le x \le 1$
Range: $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$



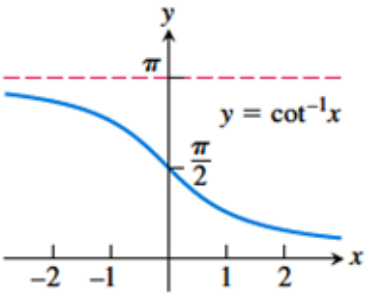
Domain: $-1 \le x \le 1$
Range: $0 \le y \le \pi$



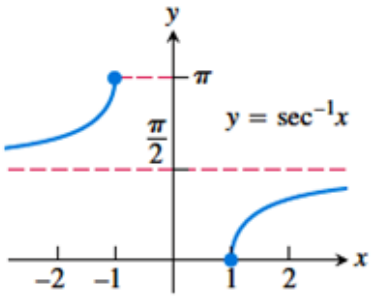
Domain: $-\infty < x < \infty$
Range: $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$



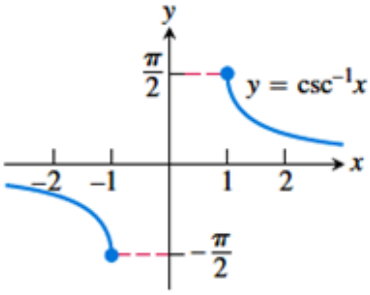
Domain: $-\infty < x < \infty$
Range: $0 < y < \pi$



Domain: $x \le -1$ or $x \ge 1$
Range: $0 \le y \le \pi, y \ne \frac{\pi}{2}$



Domain: $x \le -1$ or $x \ge 1$
Range: $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}, y \ne 0$



مشتقات الدوال المثلثية العكسية :

$$1.\ \frac{d}{dx}(\sin^{-1}u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}.\frac{du}{dx}$$

$$2.\ \frac{d}{dx}(\cos^{-1}u) = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}}.\frac{du}{dx}$$

$$3.\ \frac{d}{dx}(\tan^{-1}u) = \frac{1}{1+u^2}.\frac{du}{dx}$$

$$4.\ \frac{d}{dx}(\cot^{-1}u) = \frac{-1}{1+u^2}.\frac{du}{dx}$$

$$5.\ \frac{d}{dx}(\sec^{-1}u) = \frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}}.\frac{du}{dx}$$

$$6.\ \frac{d}{dx}(\csc^{-1}u) = \frac{-1}{|u|\sqrt{u^2-1}}.\frac{du}{dx}$$

مثال (١) جد y' للدالة $y = x\ \sin^{-1}x + \sqrt{1-x^2}$

الحل :

$$y' = x \times \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \sin^{-1}x + \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \sin^{-1}x - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1}x$$

مثال (٢) جد مشتقة الدالة $y = \tan^{-1}\frac{x-1}{x+1}$

الحل :

$$1.\quad y' = \frac{1}{1+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2} \times \frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{1}{\frac{(x+1)^2+(x-1)^2}{(x+1)^2}} \times \frac{x+1-x+1}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{2}{x^2+2x+1+x^2-2x+1} = \frac{1}{x^2+1}$$

مثال (٣) اذا كانت $y = \sqrt{x^2-1} - \sec^{-1} x$ فاثبت ان $y'(1) = 0$

3. $y' = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} - \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} - \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

$$= \frac{x^2-1}{x\sqrt{x^2-1}} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$$

$$y'(1) = \frac{\sqrt{1^2-1}}{1} = 0$$

مثال (٣) اذا كانت $y = 2x\cos^{-1} 2x - \sqrt{1-4x^2}$ فاثبت ان $y'(0) = \pi$

$$y' = 2x \times \frac{-2}{\sqrt{1-4x^2}} + 2\cos^{-1} 2x - \frac{-8x}{2\sqrt{1-4x^2}}$$

$$= -\frac{4x}{\sqrt{1-4x^2}} + 2\cos^{-1} 2x + \frac{4x}{\sqrt{1-4x^2}} = 2\cos^{-1} 2x$$

$$y'(0) = 2\cos^{-1}(0) = 2 \times \frac{\pi}{2} = \pi$$

تمارين

جد dy/dx للدوال التالية

1. $y = x(\sin^{-1} x)^2 - 2x + 2\sqrt{1-x^2}\sin^{-1} x$

2. $y = 2x\cos^{-1}\sqrt{x} + \sin^{-1}\sqrt{x} - \sqrt{x-x^2}$

3. $y = \csc^{-1}(x^2+1)$

4. $y = \cot^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{x}}{1+x}\right)$

جامعة بابل كلية العلوم قسم الكيمياء محاضرات الرياضيات م.م فؤاد حمزة عبد